

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 02:30 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème porte le nom du mathématicien grec Pythagore, bien qu'il ait été découvert et utilisé par plusieurs civilisations anciennes, notamment les Babyloniens et les Égyptiens.

Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Si on note a et b les longueurs des cathètes et c celle de l'hypoténuse, alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ce théorème ne s'applique qu'aux triangles rectangles, c'est-à-dire ceux qui possèdent un angle droit (90°).

Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. Voici une démonstration classique utilisant l'aire d'un carré.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, plaçons quatre triangles rectangles identiques, chacun ayant des cathètes de longueurs a et b , et une hypoténuse de longueur c . Ces quatre triangles sont disposés de manière à former un carré central de côté c .

L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Directement : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- En additionnant les aires des quatre triangles et du carré central : $4 \times (1/2 ab) + c^2 = 2ab + c^2$.

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2, \text{ d'où } a^2 + b^2 = c^2.$$

Ainsi, le théorème est démontré.

Exemples d'application

Exemple 1 : Soit un triangle rectangle avec des cathètes de longueurs 3 cm et 4 cm. Calculons l'hypoténuse.

D'après le théorème : $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc $c = 5$ cm.

Exemple 2 : Un triangle rectangle a une hypoténuse de 13 m et un cathète de 5 m. Quelle est la longueur de l'autre cathète ?

On a : $a^2 + 5^2 = 13^2$, soit $a^2 + 25 = 169$, donc $a^2 = 144$ et $a = 12$ m.

Exemple 3 : Vérifier si un triangle de côtés 7, 24 et 25 est rectangle.

On calcule : $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ et $25^2 = 625$. Comme l'égalité est vérifiée, le triangle est rectangle.

Réciproque et contraposée

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie : si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

La contraposée permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : si l'égalité n'est pas vérifiée, alors le triangle n'est pas rectangle.

Ces propriétés sont très utiles pour démontrer qu'un triangle est rectangle ou non, sans avoir à mesurer les angles.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en géométrie et en trigonométrie. Il permet de calculer des longueurs inconnues dans un triangle rectangle et de vérifier si un triangle est rectangle. Sa démonstration, bien que simple, illustre la puissance du raisonnement mathématique. Ce théorème trouve des applications dans de nombreux domaines : architecture, navigation, physique, etc. Il constitue une base fondamentale pour l'étude des relations métriques dans le triangle et au-delà.