

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 20:05 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème porte le nom du mathématicien grec Pythagore, bien que des preuves de sa connaissance apparaissent dans des civilisations anciennes comme les Babyloniens et les Égyptiens.

Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Si on note a et b les longueurs des cathètes et c celle de l'hypoténuse, alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cette relation permet de calculer la longueur d'un côté si les deux autres sont connus, ou de vérifier si un triangle est rectangle.

Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. En voici une classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, on place quatre triangles rectangles identiques de cathètes a et b et d'hypoténuse c , disposés de manière à former un carré central de côté c .

L'aire du grand carré est $(a + b)^2$. Elle est aussi égale à la somme des aires des quatre triangles et du carré central :

$$4 \times \left(\frac{1}{2} \times a \times b \right) + c^2 = 2ab + c^2.$$

En développant $(a + b)^2$, on obtient $a^2 + 2ab + b^2$. En égalant les deux expressions :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

En simplifiant par $2ab$, on retrouve $a^2 + b^2 = c^2$.

Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 3 cm et 4 cm. Calculons l'hypoténuse c .

D'après le théorème : $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc $c = 5$ cm.

Exemple 2 : Calcul d'un cathète

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 13 cm et un cathète mesure 5 cm. Trouvons l'autre cathète b .

On a $a^2 + b^2 = c^2$, soit $5^2 + b^2 = 13^2$. Donc $25 + b^2 = 169$, d'où $b^2 = 144$ et $b = 12$ cm.

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a des côtés de longueurs 7, 24 et 25. Est-il rectangle ?

On vérifie si $7^2 + 24^2 = 25^2$: $49 + 576 = 625$ et $25^2 = 625$. L'égalité est vraie, donc le triangle est rectangle.

Réciproque et contraposée

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie : si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

La contraposée permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : si l'égalité n'est pas vérifiée, alors le triangle n'est pas rectangle.

Applications et extensions

Le théorème de Pythagore est utilisé dans de nombreux domaines :

- **Géométrie** : calcul de distances, de diagonales, de hauteurs.
- **Trigonométrie** : définition du sinus, cosinus et tangente dans un triangle rectangle.
- **Physique** : calcul de la norme d'un vecteur, décomposition de forces.
- **Informatique** : calcul de distances entre points dans un plan.

Il existe aussi une généralisation : la loi des cosinus, qui s'applique à tout triangle : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$, où γ est l'angle entre les côtés a et b . Lorsque $\gamma = 90^\circ$, $\cos(\gamma) = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en mathématiques. Il permet de résoudre de nombreux problèmes de longueurs et de distances, et il est à la base de la trigonométrie. Sa simplicité et son utilité en font l'un des théorèmes les plus importants à maîtriser. Que ce soit pour construire une maison, naviguer ou résoudre des équations, il reste indispensable.

Document créé par Kalanso App — 22/09/2026 20:05 — Disponible sur Playstore - App