

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 12:10 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres de la géométrie. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème doit son nom au mathématicien grec Pythagore, qui aurait vécu au VI^e siècle av. J.-C., bien que des traces de cette relation apparaissent dans des civilisations plus anciennes, comme en Mésopotamie.

Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Si l'on note a et b les longueurs des cathètes et c celle de l'hypoténuse, alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cette relation permet de calculer la longueur d'un côté si l'on connaît les deux autres, mais aussi de vérifier si un triangle est rectangle.

Démonstration visuelle

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. L'une des plus simples utilise des aires de carrés.

Considérons un triangle rectangle de côtés a , b et c . Construisons un carré de côté $(a + b)$ et plaçons à l'intérieur quatre copies du triangle rectangle, comme sur la figure ci-dessous (imaginons le schéma).

L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Directement : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- En additionnant les aires des quatre triangles et du carré central : chaque triangle a pour aire $ab/2$, donc les quatre triangles ont une aire totale de $2ab$. Le carré central a pour côté c (l'hypoténuse) et donc une aire de c^2 . L'aire totale est $2ab + c^2$.

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2, \text{ d'où } a^2 + b^2 = c^2.$$

Cette démonstration est attribuée à Pythagore, mais elle n'est qu'une parmi des centaines.

Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 3 cm et 4 cm. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

On applique le théorème : $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Donc $c = 5$ cm.

On retrouve le fameux triplet pythagoricien (3, 4, 5).

Exemple 2 : Calcul d'un cathète

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 13 cm et un cathète mesure 5 cm. Quelle est la longueur de l'autre cathète ?

On a $a^2 + 5^2 = 13^2$, soit $a^2 + 25 = 169$. Donc $a^2 = 144$ et $a = 12$ cm.

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a pour côtés 7 cm, 8 cm et 11 cm. Est-il rectangle ?

On calcule le carré du plus grand côté : $11^2 = 121$. La somme des carrés des deux autres : $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$. Comme $113 \neq 121$, le triangle n'est pas rectangle.

Réciproque et contraposée

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie : si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

La contraposée permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle : si l'égalité n'est pas vérifiée, alors le triangle n'est pas rectangle.

Ces énoncés sont très utiles pour caractériser les triangles rectangles.

Applications et prolongements

Le théorème de Pythagore a d'innombrables applications pratiques : calcul de distances inaccessibles, construction de bâtiments, navigation, etc. Il est aussi à la base de la notion de distance euclidienne en géométrie analytique.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Cette formule découle directement du théorème de Pythagore.

De plus, le théorème se généralise à des espaces de dimension supérieure : dans un espace à trois dimensions, la distance entre deux points est la racine carrée de la somme des carrés des différences des coordonnées.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un pilier de la géométrie et des mathématiques en général. Sa simplicité et son utilité en font un outil incontournable, enseigné dès le collège. Il permet de résoudre de nombreux problèmes de longueurs et de distances, et ouvre la voie à des concepts plus avancés comme la trigonométrie ou la géométrie analytique. Maîtriser ce théorème, c'est acquérir une clé essentielle pour comprendre le monde qui nous entoure.