

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 14:10 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore : Fondement de la Géométrie

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce cours explore son énoncé, sa démonstration, ses applications et quelques extensions.

1. Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Soit un triangle ABC rectangle en A. Alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

ou, en notant $a = BC$ (hypoténuse), $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2. Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations. Voici une démonstration classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $(b + c)$. À l'intérieur, plaçons quatre copies du triangle rectangle de côtés b , c et a . L'aire du grand carré est $(b + c)^2$. Cette aire est aussi égale à la somme des aires des quatre triangles et du carré central de côté a .

- Aire du grand carré : $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$
- Aire des quatre triangles : $4 \times (1/2 \times b \times c) = 2bc$
- Aire du carré central : a^2

En égalant : $b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$, d'où $a^2 = b^2 + c^2$.

Cette démonstration est attribuée à Pythagore, mais elle était probablement connue des Babyloniens bien avant lui.

3. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle avec des cathètes de longueurs 3 cm et 4 cm. Calculons l'hypoténuse.

$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ donc } a = 5 \text{ cm.}$$

Exemple 2 : Calcul d'un cathète

Soit un triangle rectangle avec une hypoténuse de 13 m et un cathète de 5 m. Calculons l'autre cathète.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144, \text{ donc } b = 12 \text{ m.}$$

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a pour côtés 8, 15 et 17. Est-il rectangle ?

$$17^2 = 289 ; 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289. \text{ Oui, il est rectangle.}$$

4. Réciproque et contraposée

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie : si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

La contraposée permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : si l'égalité n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle.

5. Applications et extensions

Le théorème de Pythagore a de nombreuses applications pratiques :

- Calcul de distances dans un plan cartésien : la distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- Construction de bâtiments : vérification des angles droits.
- Navigation : calcul de distances.

Il existe aussi une généralisation : la loi des cosinus, qui s'applique à tout triangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en géométrie et au-delà. Sa simplicité et son utilité en font l'un des premiers théorèmes enseignés. Maîtriser ce théorème ouvre la porte à de nombreuses applications mathématiques et pratiques.

