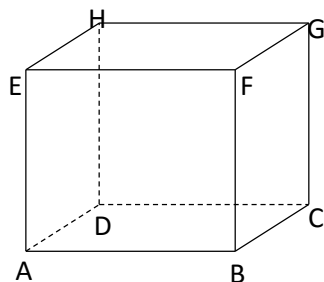


PREMIERE SERIE DES DEVOIRS SURVEILLES DU PREMIER SEMESTRE
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Contexte : Un projet de construction

Le conseil communal de **Zodji** dès son installation, a prévu construire dans l'un des arrondissements, une maison des jeunes dont le bâtiment principal aura la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête **a** ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et sera doté d'un podium comme représenté ci-dessous.



On pose :

$$\vec{i} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB} ; \vec{j} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD} ; \vec{k} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AE}$$

L'entrepreneur **AZOGNON** retenu par le conseil communal voudrait utiliser un système de cryptage et de décryptage des communications téléphoniques pour le suivi des travaux en utilisant un entier naturel **N** qui s'écrit $\overline{xyzzx}$ dans une base donnée. L'assistant de l'entrepreneur **AZOGNON** se préoccupe de réaliser le plan de construction et de déterminer cette base

Tâche : Tu es invité(e) à aider l'assistant de l'entrepreneur **AZOGNON** à trouver des solutions à ses préoccupations à travers la résolution des trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1-) Justifie que $(\mathbf{A}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(\mathbf{A}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2-a) Détermine une équation cartésienne du plan **(BEG)**.

b-) Calcule en fonction de a, l'aire du triangle BEG et le volume du tétraèdre **FBEG**.

3-) Détermine l'expression analytique de la réflexion **s** du plan **(BEG)**.

4-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite **(DF)**.

b-) Quelle est la position relative du plan **(BEG)** et de la droite **(DF)** ?

c- On désigne par $s_{(DF)}$ le demi-tour d'axe **(DF)**.

Détermine la nature de $s \circ s_{(DF)}$.

5-) Soit m un paramètre réel. A tout point M de l'espace, l'application f_m associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = m \overrightarrow{MB} + (m - 1) \overrightarrow{ME} + (m - 2) \overrightarrow{MG}$

a-) Justifie que f_1 est une translation dont tu préciseras le vecteur.

b-) Détermine l'expression analytique de la composée $f_1 \circ f_2$ dans le repère **(A, B, D, E)**.

Problème 2

Le podium sera délimité par l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{MJ}^2 - 2\overrightarrow{MK}^2 + 4\overrightarrow{ML}^2 = \frac{9}{2}\mathbf{k}^2$ où $\mathbf{IJKL}$ est un trapèze rectangle en $\mathbf{K}$ et en $\mathbf{L}$ de sens direct tel que $\text{mes}(\overrightarrow{JL}, \overrightarrow{JI}) = \frac{2\pi}{3}$ et $\mathbf{IJ} = \mathbf{JL} = \mathbf{k}$ où $\mathbf{k}$ est un nombre réel strictement positif. On désigne par $\mathbf{O}$ le milieu du segment $[\mathbf{IL}]$.

6-a) Fais une figure.

b-) Construis le point $\mathbf{S}$ barycentre des points pondérés $(\mathbf{I}, 2)$, $(\mathbf{J}, -1)$ $(\mathbf{K}, -2)$ et $(\mathbf{L}, 4)$.

7-a) Démontre que le quadrilatère $\mathbf{JKLO}$ est un rectangle.

b-) Démontre que le quadrilatère $\mathbf{IJLS}$ est un losange.

8-a) Justifie que $LI^2 = 3k^2$ et $IK^2 = \frac{13}{4}k^2$.

b-) Vérifie que $\mathbf{J}$ appartient à (Γ) .

c-) Détermine puis construis (Γ) .

Problème 3

Pour espérer réussir le décryptage, les bases **5** et **8** sont à mettre en œuvre. On espère également réussir le décryptage lorsque l'entier $\mathbf{N}$ est donné en base décimale et que les chiffres du code sont connus dans une base à déterminer

9-a) Ecris $\mathbf{N}$ en fonction des entiers x , y et z lorsque la base donnée est 5.

b-) Justifie que lorsque $\mathbf{N}$ s'écrit $\overline{yyxy}$ en base 8 on a : $\mathbf{N} = 8x + 577y$.

c-) Déduis-en que la réussite du décryptage est une réalité lorsque l'on a :
 $\mathbf{309x + 15z = 226y}$

10-) Dans cette hypothèse,

a-) Démontre que $2y \equiv 0[3]$ puis déduis-en y .

b-) Démontre que $3x \equiv 1[5]$ puis déduis-en x et z .

c-) Détermine l'écriture de $\mathbf{N}$ dans le système décimal.

11-) On suppose que $\mathbf{N}$ s'écrit **341** en base **10** et $\overline{2331}$ en base $\mathbf{b}$.

a-) Démontre que $2b^3 < 341$.

b-) Déduis-en un encadrement de $\mathbf{b}$.

c-) Détermine $\mathbf{b}$.

Bonne composition !!!