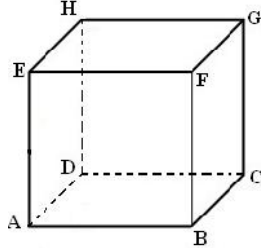


1^{er} Devoir Surveillé du 1^{er} Semestre**Épreuve : de Mathématiques****Contexte**

Dans le cadre de l'opération « zéro accident sur les routes », le CNSR a installé à l'entrée de l'échangeur de GODOMEY un appareil de vidéosurveillance de forme cubique ABCDEFGH de 1m d'arrête placé sur un poteau métallique (Δ) afin d'enregistrer les infractions des gros porteur.

L'appareil est composé de plusieurs caméras dont deux ultramodernes situés en I et J où I et J désignent respectivement le milieu du segment [GH] et le centre du carré BCGF.



Afin de surveiller simultanément tous les axes, les caméras émettant des rayons lumineux qui permettant de détecter les surcharges des gros porteurs et de renvoyer un signal à une barrière qui se ferme automatiquement sur les véhicules en infractions.

L'onde balayée par l'un des rayons lumineux est l'ensemble (Γ) des points M de l'espace orienté (C) tel que : $(\vec{M} + \vec{M} + \vec{M} + \vec{M}) \wedge (\vec{M} + \vec{M}) = \vec{0}$ et le plan réflecteur (P) des rayons lumineux mis en place lors de l'installation de l'appareil de vidéosurveillance est l'ensemble (Γ') des point M défini par $(\vec{M} - \vec{M} + \vec{M}).(\vec{M} - 2\vec{M} + \vec{M}) = 0$.

L'objectif à terme de l'opération est de réduire considérablement les accidents sur l'échangeur afin d'aménager aux alentours un parc d'attraction.

Fréynel élève en terminal D, est émerveillé par le dispositif mis en place et s'y intéresse. Il se propose d'étudier certaines caractéristiques géométriques du dispositif et de déterminer la nature exacte du domaine sur lequel sera érigé le parc.

Tâche : Tu es invité (e) à aider fréynel en résolvant les problèmes ci-dessous.

Problème 1

- 1) a – Justifie que le triplet $(\vec{A} ; \vec{A} ; \vec{A})$ est une base de l'espace.
 b – Prouve que le repère $(A ; \vec{A} ; \vec{A} ; \vec{A})$ est orthonormé direct.
 c – Détermine les coordonnées des points I, J et E dans ce repère.
- 2) Démontre que AEIJ est un tétraèdre puis calcule son volume V.
- 3) a – Justifie que $\vec{M} + \vec{M} + \vec{M} + \vec{M} = 4\vec{M}$ et $\vec{M} + \vec{M} = 2\vec{M}$.
 b – Déduis-en que (Γ) est une droite dont tu préciseras un repère.
- 4) a – Justifie que $\vec{M} - \vec{M} + \vec{M} = \vec{M}$ et $\vec{M} - 2\vec{M} + \vec{M} = -\vec{A}$ où K est le barycentre du point système du point pondérés $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$ et R le barycentre du système de points pondérés $\{(C; 1); (B; -2)\}$.
 b – Détermine les coordonnées des points K et R.
 c – Justifie que (P) est un plan dont tu donneras un repère.
- 5) a – Calcule $\vec{A} \cdot \vec{D}$ et $\vec{A} \cdot \vec{D}$.
 b – Déduis-en la position relative de la droite (AG) et du plan (BDE).

Problème 2

On muni maintenant l'espace (C) d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Les points de la montée et de la descente de l'échangeur sont respectivement définis par :

$$(Q) : 2x + y + 2z - 1 = 0 \text{ et } (R) : \begin{cases} x = 3\mu + \beta + 2 \\ y = 2\mu + 2\beta - 1 \\ z = 5\mu + 7\beta - 3 \end{cases} ; (\mu ; \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Le poteau métallique (Δ) est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de (C) tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ avec $\vec{e}_1(1 ; 1 ; 3)$ et $\vec{e}_2(-8 ; -4 ; 4)$.

- 1) a – Justifie que les plans (Q) et (R) sont perpendiculaires.
b – Détermine une équation cartésienne du plan (R).
- 2) a – Détermine une équation représentation paramétrique de (Δ) .
b – Justifie que la droite (Δ) est parallèle au plan (R).
c – La droite (Δ) est-elle parallèle au plan (Q) ? Si non, détermine les coordonnées point d'intersection de (Δ) et (Q).
- 3) a – Résous par la méthode de pivot de Gauss le système linéaire
$$(S) : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x - 4y + z = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

b – Déduis-en $(P) \cap (Q) \cap (R)$.
- 4) Deux des rayons lumineux émis par les caméras ultramodernes sont définies par les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives : $(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t + 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ $(\mathcal{D}_2) : \frac{x+1}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{z-1}{4}$.
a- Démontre que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont strictement parallèles.
b- Détermine une équation cartésienne du plan (P_1) contenant les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.
- 5) Calcule la distance d séparant les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

Problème 3

Le parc d'attraction sera installé dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$.

Dans ce plan, on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-4+3i}{z-3+2i}$ avec $z \neq 3 - 2i$ et on pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ ou $x ; X$ et Y sont des réels.

- 1) a – Exprime X et Y en fonction de x et y .
b – Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $Z \in i\mathbb{R}$.
c – Justifie que si $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$.
d – Démontre que si $|Z - 1| = 1$, alors l'ensemble des points M d'affixes z est le cercle de centre $\Omega(3 ; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
- 2) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respectives $i ; -2 + i$ et $2 + i$.
Détermine :
a- L'ensemble (D) des points M d'affixe z vérifiant : $|\bar{z} + i| = |z + 2 + i|$.
b- L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tels que $|(1 + i)z - 5i| = \sqrt{10}$.
c- L'ensemble $(D) \cap (\mathcal{C})$.

Bonne Composition !