

DEVOIR DU DEUXIEME TRIMESTRE : mois de janvier 2016

EPREUVE : MATHEMATIQUES

N.B : - Je vérifie que je n'ai rien laissé dans le casier.

- Je vérifie que je n'ai rien laissé sur la table qui ne doit me servir pour ma composition.
- Je ne sors pas de la classe pendant que je compose.
- Je ne sors pas de la classe avant la fin du temps imparti à l'épreuve que je traite.
- Je dis « NON » à la tricherie.

Contexte : Le meilleur teinturier

Taka est un artiste teinturier exerçant dans le département des collines. La qualité scientifique de ses œuvres ont fait de lui le meilleur artiste de sa catégorie. Pour la réalisation de ses jolies toiles, il utilise une maquette spéciale, sur laquelle on observe, entre autres figures, une triangle ABC rectangle en A; en polygone régulier MoM₁M₂M₃M₄, une courbe (C).

Vignon, élève en classe de Terminale D, a recueilli auprès de TAKA les informations suivantes sur sa maquette :

- Le plan de la maquette est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
- Les affixes des sommets du triangle ABC sont les racines du polynôme $P(z) = z^3 + (1 - 3i)z^2 - (16 + 5i)z + 14 - 52i$
- Les affixes des sommets du pentagone régulier MoM₁M₂M₃M₄ sont les racines cinquièmes du nombre complexe $U_0 = -2\sqrt{6} + 2i\sqrt{2}$

• (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = 1 + \frac{3\sqrt{x+3} - 6}{\sqrt{x} - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Vignon se préoccupe de vérifier les informations recueillies auprès de TAKA.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Vignon à travers la résolution des trois problèmes ci-après :

Problème 1

1. a) Calcule $(9 + i)^2$
b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 5i)z - 26 - 7i = 0$
2. a) Calcule $P(3)$ et $P(-2i)$
b) Dédus-en $p(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes de degrés respectifs 1 et 2.
c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
d) Précise les affixes respectives des points A, B et C sachant que $\text{Im}(z_A) < 0$ et $\text{Re}(z_B) > 0$
3. Dans le plan complexe (P) muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $-2i$; $4 + 3i$ et $-5 + 2i$
 - a) Calcule $\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}}$
 - b) Dédus-en la nature exacte du triangle A'B'C'
 - c) Calcule l'aire du triangle A'B'C'

Problème 2

On considère les nombres complexes $V_0 = 2\sqrt{6}(1 + i)$ $z_0 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{6}i}$ $z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{17\pi}{30}i}$

4. a) Ecris u_0 sous la forme exponentielle
b) Dédus-en les affixes des sommets du pentagone régulier $MoM_1M_2M_3M_4$
5. a) Ecris sous la forme algébrique $\frac{U_0}{V_0}$
b) Ecris sous la forme trigonométrique v_0 et $\frac{U_0}{V_0}$
c) Dédus-en la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$
6. a) Démontre que $z_1 - z_0 = 2i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{5} e^{\frac{11\pi}{30}i}$
b) Mo et M_1 étant les points de (P) d'affixes respectives z_0 et z_1 . Calcule la distance MoM_1
c) Construis les points Mo et M_1 dans le plan (P) (unité de longueur 4cm)
7. Détermine le plus petit nombre entier naturel non nul n tel que $\left(\frac{U_0}{V_0}\right)^n$ est un nombre réel.

Problème 3

La valeur de l'une des toiles exposées par TAKA T_1 est, en centaines de milliers de francs CFA, la limite en $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

8. a) Justifie que le domaine de définition de g est $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
 - b) Calcule les limites de g aux bornes de D
 - c) Déduis-en la valeur de T_1
9. a) Etudie la continuité de g
 - b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$
 - c) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
10. a) Justifie que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
 - b) Démontre que f est prolongeable par continuité en 1.
 - c) Définis la fonction h qui prolonge f par continuité en 1.